www.shamsunalarabia.org

الوحدة 4. تطبيقات التكامل

4A. السطوح بين المنحنيات.

4A-1

أوجد المساحة بين المنحنيات التالية:

a) $y=2x^2$ و $y=3x-1$

b) $y=x^3$ و $y=ax$ ؛ نفترض أنَّ $a>0$

c) $y=x+1/x$ و $y=5/2$.

d) $x=y^2-y$ والمحور y .

4A-2

أوجد المساحة تحت المنحنى $y=1-x^2$ بطريقتين.

4A-3

أوجد المساحة بين المنحنيات $y=4-x^2$ و $y=3x$ بطريقتين.

4A-4

أوجد المساحة بين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ من تقاطع إلى التقاطع التالي.

4B. الحجم بالتقطيع؛ الحجم بالدوران

4B-1

أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيات حول المحور x.

a) $y=1-x^2$ ، $y=0$
b) $y=a^2-x^2$ ، $y=0$
c) $y=x$ ، $y=0$ ، $x=1$
d) $y=x$ ، $y=0$ ، $x=a$
e) $y=2x-x^2$ ، $y=0$
f) $y=2ax-x^2$ ، $y=0$
g) $y=\sqrt{ax}$ ، $y=0$ ، $x=a$
h) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ، $x=0$

4B-2

أوجد حجم الصلب الناتج عن دوران المساحات في 4B-1 حول المحور y.

4B-3

بين أنَّ حجم الهرم ذي القاعدة المستطيلة هو $bh/3$، حيث b هو مساحة القاعدة و h هو الارتفاع. (بين من خلال الطريقة المتبعة أنَّ أبعاد المستطيل لا تهم).

4B-4

نعتبر (x,y,z) بحيث يكون $x^2+y^2<1$ ، $x>0$ و $0\le z\le 5$. تصف هذه المعادلات نصف أسطوانة. نقوم بقص مقطع إسفيني من القضيب على طول $z=2x$. أوجد حجم المقطع الإسفيني.

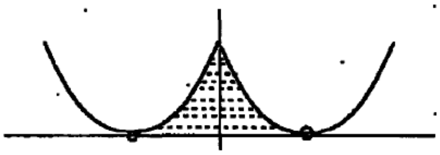
4B-5

أوجد حجم الجسم الحاصل من دوران مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a حول واحد من أضلاعه.

4B-6

قاعدة جسم هي القرص $x^2+y^2\leq a^2$. المستويات العمودية على المستوي xy والعمودية على المحور x تقطع الجسم إلى مثلثات قائمة متساوية الساقين. وتر هذه المثلثات هو القطعة عند التقاء المستوى بالقرص. ما هو حجم الجسم؟

4B-7



برج مبني بقاعدة مربعة ومقطع عرضي أفقي مربع. يشاهد من أي جهة عمودياً على الجهة، قاعدة البرج عند $y=0$ وخطوطه الجانبية $y=(x-1)^2$ و $y=(x+1)^2$. (انظر المنطقة المظللة في الشكل.) أوجد حجم الجسم

4C. الحجم بالطبقات

4C-1

نفترض أنَّ $0<a<b$. ندير القرص $(x-b)^2+y^2\le a^2$ حول المحور y. شكل الكعكة هذا يسمى بالحلقة.

a) أنشئ تكامل الحجم باستعمال تكامل dx

b) أنشئ تكامل الحجم باستعمال تكامل dy

c) احسب (b).

d) (اختياري) بيّن أنَّ (a) و (b) هما متماثلتان باستعمال التعويض $z=x-b$.

4C-2

أوجد حجم المنطقة $0\le y\le x^2$، $x\le 1$ المدارة حول المحور y

4C-3

أوجد حجم المنطقة $\sqrt{x}\le y\le 1$، $x\ge 0$ المدارة حول المحور y بطريقة الطبقات وطريقة الأقراص.

4C-4

أنشئ التكاملات من أجل حجم المنطقة في 1-4B بطريقة الطبقات. (لا تقيمه)

4C-5

أنشئ التكاملات من أجل حجم المنطقة في 2-4B بطريقة الطبقات. (لا تقيمه)

4C-6

لتكن $0<a<b$. نعتبر كرة نصف قطرها b و a أسطوانة نصف قطرها a التي يمر محورها من خلال مركز الكرة. أوجد حجم الكرة بدون الأسطوانة.

4D. القيمة المتوسطة

4D-1

ما هي مساحة المقطع العرضي المتوسطة للصلب المتحصل عليه بدوران المنطقة المحصورة بين $x=2$، والمحور x، والمنحنى $y=x^2$ حول المحور x؟ (المقطع العرضي مأخوذ عمودي على المحور x.)

4D-2

بيّن أنَّ القيمة المتوسطة لـ $1/x$ طول المجال $[a,2a]$ لها شكل C/a، حيث C هي ثابت مستقل عن a. (افرض أنَّ $a>0$)

4D-3

تدور نقطة وفق المحور x، مع دالة المسافة المعطاة بـ $x=s(t)$. بيّن أنه خلال المجال الزمني $[a,b]$، تكون القيمة المتوسطة لسرعتها $v(t)$ تساوي سرعتها المتوسطة خارج المجال.

4D-4

ما هي القيمة المتوسطة لمربع مسافة النقطة P عن النقطة المثبتة Q في دائرة الوحدة، أين P المختارة عشوائياً على الدائرة؟ (استعمل الإحداثيات؛ وضع Q على المحور x.) تحقق من منطقية إجابتك.

4D-5

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ بين 0 و x معطاة بالدالة $g(x)$، عبر عن $f(x)$ بدلالة $g(x)$.

4D-6

المبلغ المالي A المجمع باستمرار كمعدل فائدة r يزيد تبعاً للقانون

$$A(t)=A_0e^{rt} \qquad (t\text{=الزمن بالسنة})$$

a) ما هو المبلغ المالي المتوسط في البنك بعد مرور T سنة.

b)نفترض أنَّ r و T صغيرتين. أعط جواباً تقريبياً للطلب (a) باستعمال التقريب التربيعي لإجابتك الدقيقة؛ تحقق من منطقيته.

4D-7

أوجد القيمة المتوسطة لـ x^2 في $0 \leq x \leq b$.

4D-8

أوجد المسافة المتوسطة من نقطة على محيط مربع طول ضلعه a إلى المركز. أوجد متوسط مربع المسافة.

4D-9

أوجد القيمة المتوسطة لـ $\sin ax$ في حدبتها الأولى

4E. معادلات الإحداثيات

4E-1

أوجد المعادلة الإحداثية بدلالة x و y عندما تكون $x=t+t^2$ ، $y=t+2t^2$.

4E-2

أوجد المعادلة الإحداثية بدلالة x و y عندما تكون $x=t+1/t$ و $y=t-1/t$ (احسب x^2 و y^2).

4E-3

أوجد المعادلة الإحداثية بدلالة x و y عندما تكون $x=1+\sin t$ ، $y=4+\cos t$.

4E-4

أوجد المعادلة الإحداثية بدلالة x و y عندما تكون $x=\tan t$ ، $y=\sec t$.

4E-5

أوجد المعادلة الإحداثية بدلالة x و y عندما تكون $x=\sin 2t$ ، $y=\cos t$.

4E-6

من أجل القطع الزائد $y=x^2$ ، أوجد المعادلات الوسيطية باستعمال ميل المنحنى عند النقطة (x,y) على أنه متحول وسيطي.

4E-7

أوجد المعادلات الوسيطية من أجل الدائرة $x^2+y^2=a^2$ باستعمال الميل كمتحول وسيط. ما هي القطعة من الدائرة التي تحصل عليها بهذه الطريقة.

4E-8

في منتصف النهار، يبدأ حلزون بالزحف من مركز ساعة مفتوحة الواجهة. يزحف بمعدل ثابت على عقرب الساعة، يصل إلى نهاية العقرب في $1:00PM$. طول عقرب الساعة 1 متر. اكتب المعادلات الوسيطية لموضع الحلزون في اللحظة t، وذلك باستخدام إحداثيات xy مناسبة.

4E-9*

a) ما هو الجزء من القطار الذي يتحرك إلى الخلف عندما يتحرك القطار إلى الأمام؟

b) نصف قطر داخلي لقرص دائري هو a ونصف قطره الخارجي هو b. تدور دائرته الداخلية وفق الجهة الموجبة للمحور x دون انزلاق. أوجد المعادلات الوسيطية للحركة لنقطة P على حافته الخارجية، بافتراض أنَّ P تبدأ عند $(0,b)$. استعمل θ على أنها الوسيط. (يجب على معادلتك أن تتقلص إلى التي تمثل دويري عندما $a=b$. هل يتحقق ذلك؟)

c) أرسم المنحنى الذي يرسمه P.

d) بين انطلاقاً من المعادلات الإحداثية التي أوجدتها أنَّ P يتحرك إلى الخلف عندما يكون تحت المحور x.

4F. طول القوس

4F-1

أوجد طول قوس المنحنيات التالية

a) $y=5x+2$ ، $0\le x\le 1$.

b) $y=x^{3/2}$ ، $0\le x\le 1$.

c) $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$ ، $0\le x\le 1$

d) $y=(1/3)(2+x^2)^{3/2}$ ، $1\le x\le 2$

4F-2

أوجد طول المنحنى $y=(e^x+e^{-x})/2$ من أجل $0\le x\le b$. تلميح:

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

4F-3

عبر عن طول القطع الزائد $y=x^2$ من أجل $0\le x\le b$ كتكامل. (لا تحسبه.)

4F-4

أوجد طول المنحنى $x=t^2$ ، $y=t^3$ من أجل $0\le t\le 2$.

4F-5

أوجد تكاملاً لطول المنحنى المعطى إحداثياً في التمرين 2-4E من أجل $1\le t\le 2$. بسط التكامل بأقصى ما يمكن دون أن تقيمه.

4F-6

a) حركة التدحرج المعطاة حدودياً بـ $x=t-\sin t$ ، $y=1-\cos t$ تمثل مسار نقطة على إطار عجلة متحركة. إذا كان t يمثل الزمن، إذن العجلة تدور بسرعة ثابتة. ما هي سرعة النقطة عند كل لحظة t؟ متى تكون الحركة إلى الأمام (dx/dt) بالحد الأقصى ومتى تكون بالحد الأدنى؟

b) أوجد طول مسار النقطة عندما تدور العجلة دورة واحدة. (استعمل قانون نصف الزاوية.)

4F-7

عبر عن طول القطع الناقص $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ باستعمال الحدودية $x=a\cos t$ و $y=b\sin t$. (لا تحسبه)

4F-8

أوجد طول المنحنى $x=e^t\cos t$ ، $y=e^t\sin t$ من أجل $0\le t\le 10$.

4G. مساحة السطح

4G-1

نعتبر كرة نصف قطرها R مشكلة بدوران الدائرة $x^2+y^2=R^2$ حول المحور x. بيّن أنه من أجل $-R\le a<b\le R$، الجزء من الكرة $a\le x\le b$ له مساحة $2\pi R(b-a)$. على سبيل المثال، نصف الكرة $a=0$، $b=R$ له مساحة $2\pi R^2$.

4G-2

أوجد المساحة عندما تدور $y=1-2x$ الواقعة في الربع الأول حول المحور x.

4G-3

أوجد المساحة عندما تدور $y=1-2x$ الواقعة في الربع الأول حول المحور y.

4G-4

أوجد صيغة التكامل للمساحة $y=x^2$، $0\le x\le 4$ المدارة حول المحور x. (لا تحسبها)

4G-5

أوجد مساحة $y=x^2$، $0\le x\le 4$ المدارة حول المحور y.

4G-6

أوجد مساحة الشكل النجمي $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ المدارة حول المحور x.

4G-7

لنأخذ النتوء المستدير من المسألة $E22-1$.

a) أنشئ التكامل من أجل مساحة السطح باستعمال dx

b) أنشئ التكامل من أجل مساحة السطح باستعمال dy

c) احسب (b) بتعويض $y = a\sin\theta$.

4H. منحنيات الإحداثيات القطبية

4H-1

من أجل كل النقاط التالية المعطاة بإحداثيات مستطيلة، أعطها إحداثيات قطبية. (بالنسبة للنقاط تحت المحور x، أعط عبارتين لإحداثياتها القطبية باستعمال القيم الموجبة والسالبة لـθ على الترتيب.)

a) $(0,3)$ b) $(-2,0)$ c) $(1,\sqrt{3})$ d) $(-2,2)$

e) $(1,-1)$ f) $(0,-2)$ g) $(\sqrt{3},-1)$ h) $(-2,-2)$

4H-2

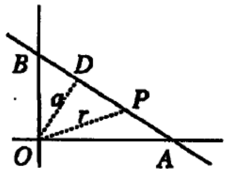
a) أوجد باستعمال طريقتين مختلفتين المعادلة بإحداثيات قطبية للدائرة التي نصف قطرها a مع المركز عند $(a,0)$ على المحور x، كالتالي:

(i) اكتب معادلتها بالإحداثيات المستطيلة، ومن ثم غيرها إلى الإحداثيات القطبية (عوض $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$)، وبعد ذلك قم بالتبسيط).

(ii) حلها باعتبارها مسألة موقع هندسي: ليكن OQ القطر الذي ينتمي إلى المحور x، و P: (r,θ) نقطة على الدائرة؛ استعمل ΔOPQ والعلاقات المثلثية لإيجاد العلاقة التي تربط r و θ.

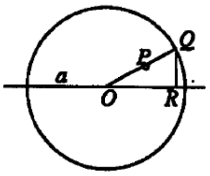
b) أعد تحليل 4H-2a من أجل دائرة نصف قطرها a ومركزها عند $(0,a)$ على المحور y؛ OQ هي الآن القطر الذي ينتمي إلى المحور y.

c) (i) أوجد المعادلة القطبية للمستقيم القاطع للجهة الموجبة من المحور x والمحور y عند A و B على الترتيب، والذي له المسافة العمودية a من المبدأ.



(لتكن $\alpha=\angle DOA$؛ استعمل المثلث القائم DOP للحصول على المعادلة التي تربط r، θ، α و a)

(i) حول معادلتك القطبية إلى المعادلة الاعتيادية المستطيلة التي تدخل A و B، باستعمال العلاقات المثلثية.



d) في الشكل المرافق، النقطة Q تتحرك حول دائرة بنصف قطر a المتمركز في المبدأ؛ QR عمودي على المحور x. P هي النقطة على الشعاع OQ على أنَّ $|QP|=|QR|$: P هي النقطة داخل الدائرة في أول ربعين، لكنها خارج الدائرة في الربعين الأخيرين.

(i) مثل بيانياً موضع P ؛ الموضع يسمى بـ قلبي الشكل (3-4H c).

(ii) أوجد المعادلة القطبية للموضع.

e) النقطة P تتحرك في الموضع بحيث يكون جداء المسافات من النقطتين Q : $(-a,0)$ و R : $(a,0)$ ثابتاً. بافتراض أن موضع P يمر خلال المبدأ، حدد قيمة الثابت، وقم باشتقاق المعادلة القطبية للموضع P.

(استعن بمربع المسافات، بدلاً من المسافات بحد ذاتها، واستعمل قانون دوال جيب التمام؛ الوحدة $((A+B)(A-B)=A^2-B^2$ و $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بسّط الحل وأعط إجابة بسيطة عند النهاية. المنحنى الناتج هو منحنى ذو عروتين، (3-4H g).

4H-3

بالنسبة لكل مما يلي:

(i) أعط المعادلة الموافقة بالإحداثيات المستطيلة.

(ii) ارسم المنحنى؛ بين جهة تزايد θ.

a) $r = \sec\theta$

b) $r = 2a\cos\theta$

c) $r = (a + b\cos\theta)$ (وهو شكل قلبي من أجل $a=b$، وحلزوني بحلقة من أجل $0<a<b$ وحلزوني بدون حلقة من أجل $a>b>0$).

d) $r = a/(b + c\cos\theta)$ (نفترض أنَّ الثابتين a و b موجبان. يمثل هذا قطعاً ناقصاً من أجل $b>|c|>0$، دائرة من أجل $c=0$، قطعاً زائداً من أجل $b=|c|$، وقطعاً مكافئاً من أجل $b<|c|$).

e) $r = a\sin(2\theta)$ (وردة بأربع بتلات) f) $r = a\cos(2\theta)$ (وردة بأربع بتلات)

g) $r^2 = a^2 \sin(2\theta)$ (منحنٍ ذو عروتين)

h) $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$ (منحنٍ ذو عروتين)

i) $r = e^{a\theta}$ (لوغاريتم حلزون)

4I. المساحة وطول القوس في الإحداثيات القطبية

4I-1

أوجد عنصر طول القوس $ds = w(\theta)d\theta$ للمنحنى من 3-4H

4I-2

أوجد مساحة بتلة واحدة لوردة ثلاثية البتلات $r = a\cos(3\theta)$.

4I-4

أوجد مساحة المنطقة $0 \le r \le e^{3\theta}$ من أجل $0 \le \theta \le \pi$

4I-4

أوجد مساحة حلقة واحدة للمنحني ذي العروتين $r^2 = a^2\sin(2\theta)$

4I-5

ما هي المسافة المتوسطة إلى النقطة على الدائرة التي نصف قطرها a من النقطة المثبتة Q على الدائرة؟ (ضع الدائرة بحيث تكون Q عند المبدأ واستعمل الإحداثيات القطبية.)

4I-6

ما هي المسافة المتوسطة من المحور x للنقطة المختارة عشوائيا على المنحنى ذي الشكل القلبي $r = a(1-\cos\theta)$، إذا اختيرت النقطة.

a) بجعل الشعاع $\theta = c$ يمتد في المكان بسرعة منتظمة، يتوقف عشوائياً عند النقطة التي يتقاطع فيها مع الشكل القلبي.

b) بجعل النقطة P تحوم حول الشكل القلبي بسرعة منتظمة، تتوقف عشوائياً. (الإجابات عن (a) و (b) مختلفة)

4I-7

احسب مساحة وطول قوس دائرة ذات المعادلات الوسيطية $x = a\cos\theta$ ، $y = a\sin\theta$.

4J. تطبيقات أخرى

4J-1

نفترض أنه يلزمنا k وحدة طاقة لرفع متر مكعب من الماء متراً واحداً. فكم من الطاقة E ستأخذ المضخة لتجفيف ثقب دائري قطره 1 متر وعمقه 100 متر مملوءاً بالماء تقريباً؟ (اشرح السبب.)

4J-2

الكمية x (بالغرام) للمادة المشعة تقل قوة تركيزها خلال الزمن (بالدقائق)، وفقاً للقانون $x = x_0 e^{-kt}$، حيث x_0 هي الكمية الموجودة في البداية عند اللحظة $t = 0$. فإذا كان إنتاج 1 غرام من المادة ينتج r وحدة من إشعاع/الدقيقة، فما هي كمية الإشعاع R التي تنتج خلال ساعة واحدة بـ x_0 غراماً من المادة؟ (اشرح السبب.)

4J-3

مسبح دائري غير عميق عمقه متجانس D، ونصف قطره R (متر). يُطلق مطهر كيميائي في مركزه، وبعد بضعة ساعات من الانتشار المتساوي عن المركز، يكون التركيز الكيميائي عند النقطة r متر من المركز هو $\frac{k}{1+r^2}\ \mathrm{g/cm}^3$.

ما هي الكمية الكيميائية A التي أطلقت في مركز المسبح؟ (اشرح السبب.)

4J-4

نفترض أن مسبحاً خارجياً ساخناً يلزمه k وحدة حرارية في الساعة الواحدة لكل درجة F يحافظ عليها فوق درجة حرارة الهواء الخارجي.

إذا كانت درجة الحرارة الخارجية T تتغير بين $50°$ و $70°$ خلال مدة 24 ساعة تبدأ من منتصف الليل، وفقاً لـ $T = 10(6-(\pi t/12))$، كم وحدة حرارية يلزم للحفاظ على درجة حرارة المسبح ثابتة عند $75°$؟ (فسرذلك)

4J-4

تكلفة تخزين وحدة من مخزون مصنعي هي c دولار في اليوم من أجل المكان والتأمين. خلال مدة 30 يوماً، ازداد الإنتاج P من 10 إلى 40 وحدة في اليوم وفقا لـ $P=10+t$. بافتراض أنه لم تُبَعْ ولا وحدة، ما هي تكلفة المخزون لهذه المدة؟ (فسر ذلك.)

الوحدة 4. تطبيقات التكامل

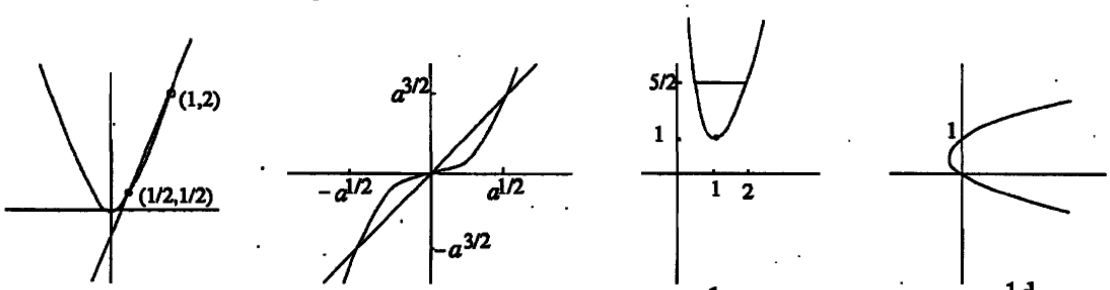
4A. المساحات بين المنحنيات

4A-1

a) $\int_{1/2}^{1}\left(3x-1-2x^{2}\right)dx=(3/2)x^{2}-x-(2/3)x^{3}\Big|_{1/2}^{1}=1/24$

b) $x=\pm a \quad \Rightarrow \quad x^{3}=ax$ أو $x=0$. هناك قطعتان مغلقتان ($-ax<x<0$ و $0<x<a$) بالمساحة نفسها بالتناظر. بحيث تكون المساحة الكلية:

$$2\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(ax-x^{3}\right)dx=ax^{3}-(1/2)x^{4}\Big|_{0}^{\sqrt{a}}=a^{2}/2$$



1a 1b 1c 1d

c) $x+1/x=5/2\rightarrow x^{2}+1=5x/2$ أي $x=2$ أو $1/2$. وبالتالي، المساحة هي

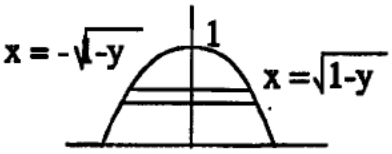
$$\int_{1/2}^{2}\left[5/2-(x+1/x)\right]dx=5x/2-x^{2}/2-\ln x\Big|_{1/2}^{2}=15/8-2\ln 2$$

d) $$\int_{0}^{1}\left(y-y^{2}\right)dy=y^{2}/2-y^{3}/3\Big|_{0}^{1}=1/6$$

4A-2

الطريقة الأولى (dx):

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(1-x^{2}\right)dx=2x-2x^{3}/3\Big|_{0}^{1}=4/3$$



الطريقة الثانية (y): $\left(x=\pm\sqrt{1-y}\right)$

$$\int_0^1 2\sqrt{1-y}\,dy=(4/3)(1-y)^{3/2}\Big|_0^1=4/3$$

4A-3

4-x2 = 3x أي x = 1 أو -4.

الطريقة الأولى (dx):

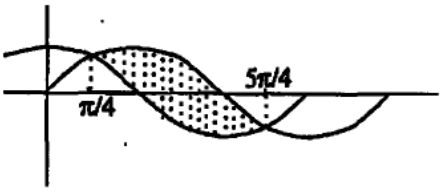
$$\int_{-4}^{1}\left(4-x^2-3x\right)dx=4x-x^3/3-3x^2/2\Big|_{-4}^{1}=125/6$$

الطريقة الثانية (dy): مساحة القطاع الصغير

$$\int_{-12}^{3} y/3+\sqrt{4-y}\,dy=y^2/6-(2/3)(4-y)^{3/2}\Big|_{-12}^{3}=117/6$$

مساحة القطاع العلوي

$$\int_3^4 2\sqrt{4-y}\,dy=-(4/3)(4-y)^{3/2}\Big|_3^4=4/3$$



(انظر الشكل من أجل حدود التكامل.) لاحظ أنَّ $117/6+4/3=125/6$.

4A-4

$x=\pi/4+k\pi \quad \Rightarrow \quad \sin x=\cos x$. إذن المساحة هي

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}=2\sqrt{2}$$

4B. الحجم بالتقطيع؛ حجم الدوران

4B-1

a) $$\int_{-1}^{1} \pi y^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi\left(1-x^2\right)^2 dx = 2\pi\int_0^1 \left(1-2x^2+x^4\right)dx$$
$$= 2\pi\left(x-2x^3/3+x^5/5\right)\Big|_0^1 = 16\pi/15$$

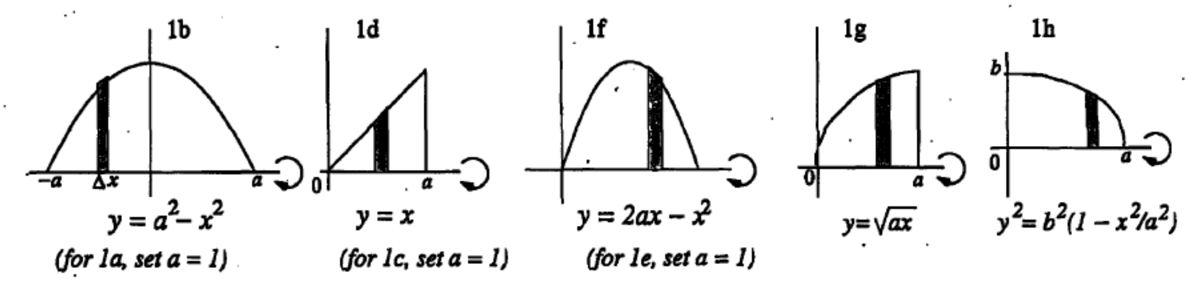
b) $$\int_{-a}^{a} \pi y^2 dx = \int_{-a}^{a} \pi\left(a^2-x^2\right)^2 dx = 2\pi\int_0^a \left(a^4-2a^2x^2+x^4\right)dx$$
$$= 2\pi\left(a^4x-2a^2x^3/3+x^5/5\right)\Big|_0^a = 16\pi a^5/15$$

c) $$\int_0^1 \pi x^2 dx = \pi/3$$

d) $$\int_0^a \pi x^2 dx = \pi a^3/3$$

e) $$\int_0^2 \pi\left(2x-x^2\right)^2 dx = \int_0^2 \pi\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx = \pi\left(4x^3/3-x^4+x^5/5\right)\Big|_0^2 = 16\pi/15$$

(لماذا (e) تماثل (a)؟ أكمل التربيع وفسّر.)



f) $$\int_0^{2a} \pi\left(2ax-x^2\right)^2 dx = \int_0^{2a} \pi\left(4a^2x^2-4ax^3+x^4\right)dx$$
$$= \pi\left(4a^2x^3/3-ax^4+x^5/5\right)\Big|_0^2 = 16\pi a^5/15$$

(لماذا (f) تماثل b ؟ أكمل التربيع ثم فسّر.)

g) $$\int_0^a ax dx = \pi a^3/2$$

$$\int_0^a \pi y^2 dx = \int_0^a \pi b^2 \left(1 - x^2 / a^2\right) dx = \pi b^2 \left(x - x^3 / 3a^2\right)\Big|_0^a = 2\pi b^2 a / 3 \quad (h$$

4B-2

$$\int_0^1 \pi(1-y)dy = \pi / 2 \quad (a$$

$$\int_0^{a^2} \pi\left(a^2 - y\right)dy = \pi a^4 / 2 \quad (b$$

$$\int_0^1 \pi\left(1-y^2\right)dy = 2\pi / 3 \quad (c$$

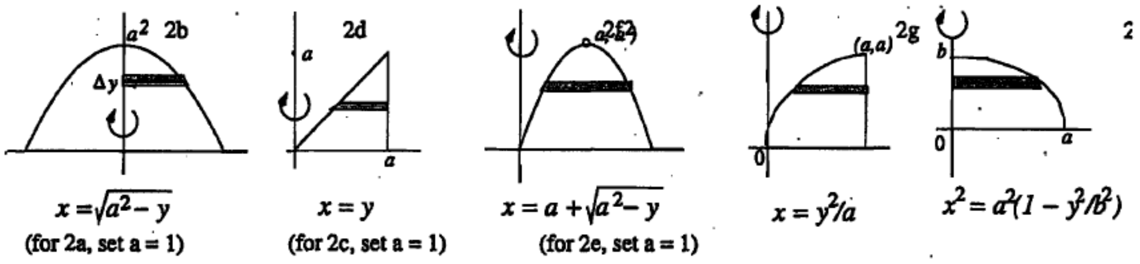
$$\int_0^a \pi\left(a^2 - y^2\right)dy = 2\pi a^3 / 3 \quad (d$$

$(e$ $x^2 - 2x + y = 0$ $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$ $\Rightarrow$. باستعمال طريقة (washers):

$$\int_0^1 \pi\left[\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right]dy = \int_0^1 4\pi\sqrt{1-y}\,dy$$

$$= -(8/3)\pi(1-y)^{3/2}\Big|_0^1 = 8\pi / 3$$

(على عكس $1(e)$ و $1(a)$ ، الدوران حول المحور y يجعل الصلب في $2(e)$ مختلفاً عن $2(a)$)



$(f$ $x^2 - 2ax + y = 0$ $\Leftarrow$ $x = a \pm \sqrt{a^2 - y}$. باستعمال طريقة (ووشير):

$$\int_0^{a^2} \pi\left[\left(a+\sqrt{a^2-y}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-y}\right)^2\right]dy = \int_0^{a^2} 4\pi a\sqrt{a^2-y}\,dy$$

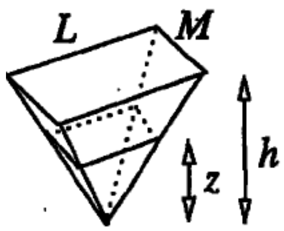
$$= -(8/3)\pi a\left(a^2-y\right)^{3/2}\Big|_0^1 = 8\pi a^4 / 3$$

$(g$ استعمال (ووشير): . $\int_0^a \pi\left(a^2 - \left(y^2/a\right)^2\right)dy = \pi\left(a^2 y - y^5 / 5a^2\right)\Big|_0^a = 4\pi a^3 / 5$.

$$\int_{-b}^{b} \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^b a^2(1-y^2/b^2)dy = 2\pi(a^2y - a^2y^3/3b^2)\Big|_0^b = 4\pi a^2 b/3 \quad (h$$

(الإجابة في $2(h)$ هي ضعف الإجابة في $1(h)$، مع a و b مقلوبين. هل يمكنك معرفة لماذا؟)

4B-3



اقلب الهرم رأساً على عقب. حسب المثلثات المتشابهة، طول أضلاع قاعدة الهرم السفلي الأصغر $(z/h)L$ و $(z/h)M$.

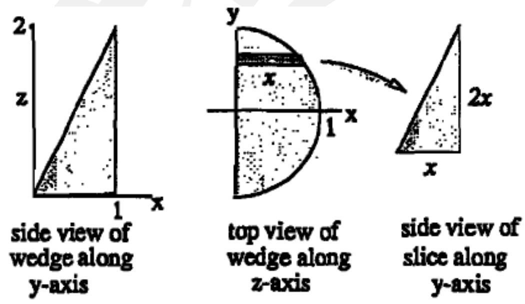
مساحة قاعدة الهرم الأكبر $b = LM$؛ قاعدة الهرم الأصغر تشكل قطعاً عرضياً، ومساحتها:

$$(z/h)L \cdot (z/h)M = (z/h)^2 LM = (z/h)^2 b$$

و بالتالي فإن الحجم:

$$\int_0^h (z/h)^2 b dz = bz^3/3h^2\Big|_0^h = bh/3$$

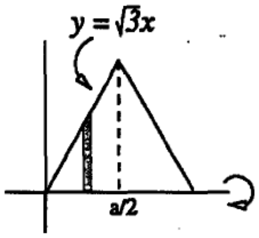
4B-4



القطعة العمودية على المستوي xz عبارة عن مثلثات قائمة ذات قاعدة طول ضلعها x وارتفاع $z = 2x$. وبالتالي فإن مساحة القطعة هي x^2. الحجم هو

$$\int_{-1}^{1} x^2 dy = \int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = 4/3$$

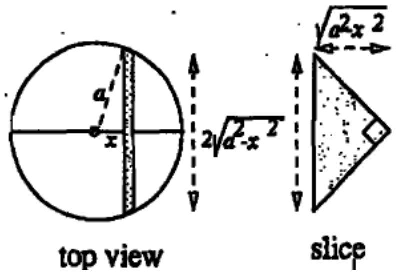
4B-5



يمكن توضيح أحد الجوانب بـ $y = \sqrt{3}x$ من أجل $0 \le x \le a/2$. وبالتالي يكون الحجم:

$$2\int_0^{a/2}\pi y^2 dx 2\int_0^{a/2}\pi\left(\sqrt{3}x\right)^2 dx = \pi a^3/4$$

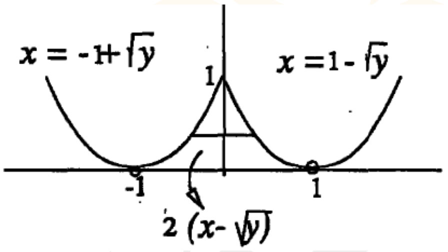
4B-6



إذا كان طول وتر مثلث قائم متساوي الساقين h، فإن مساحته هي $h^2/4$. نهايات القطع في المستوي xy هي $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$، إذن، $h=2\sqrt{a^2-x^2}$. وككل يكون الحجم:

$$\int_{-a}^{a}\left(h^2/4\right)dx=\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=4a^3/3$$

4B-7



بالحل من أجل x في $y=(x-1)^2$ و $y=(x+1)^2$ يعطي القيم

$$x=1\pm\sqrt{y} \text{ و } x=-1\pm\sqrt{y}$$

الجزء الأصعب هو تقرير أي إشارة للجذر التربيعي تمثل نقاط النهاية للمربع.

الطريقة 1: النقطة $(0,1)$ يجب أن تكون على كل من المنحنيين. نعوض في $y=1$ و $x=0$ لنرى بأنَّ إشارة الجذر التربيعي يجب أن تكون معاكسة لإشارة (1): $x=1-\sqrt{y}$ و $x=-1+\sqrt{y}$.

الطريقة 2: انظر إلى الشكل. $x=1+\sqrt{y}$ اختيار خاطئ لأنه يشكل النصف الأيمن للقطع الزائد. مع الرأس $(1,0)$. نريد النصف الأيسر: $x=1-\sqrt{y}$. بالمثل، نريد $x=-1+\sqrt{y}$، النصف الأيمن للقطع الزائد مع الرأس $(-1,0)$. ومنه، جانب المربع هو المجال $-1+\sqrt{y}\le x\le 1-\sqrt{y}$، والذي طوله $2\left(1-\sqrt{y}\right)$ والحجم يكون:

$$\text{الحجم}=\int_0^1 2\left(1-\sqrt{y}\right)^2 dy=4\int_0^1\left(1-2\sqrt{y}+y\right)dy=2/3$$

4C. الحجم عن طريق الطبقات

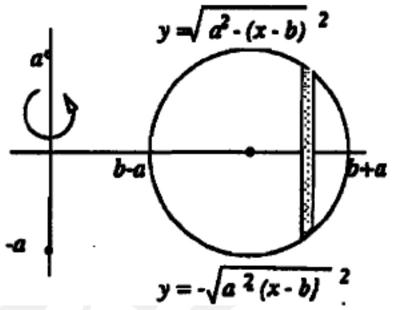
4C-1

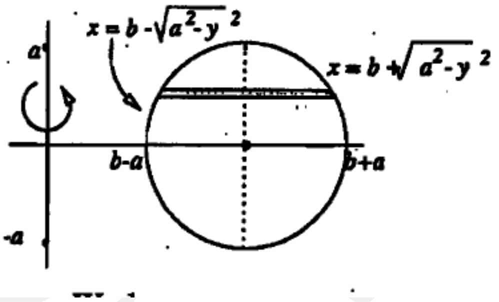
a) الطبقات: $\int_{b-a}^{b+a}(2\pi x)(2y)dx = \int_{b-a}^{b+a}4\pi x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx$

b) $x = b \pm \sqrt{a^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad (x-b)^2 = a^2-y^2$

وشير: $\int_{-a}^{a}\pi\left(x_2^2-x_1^2\right)dy = \int_{-a}^{a}\pi\left(\left(b+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\right)dy$

$$= \pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$





c) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \pi a^2/2$، لأنها مساحة نصف دائرة نصف قطرها a.

من b) <== حجم الحلقة $2\pi^2a^2b = (b)$

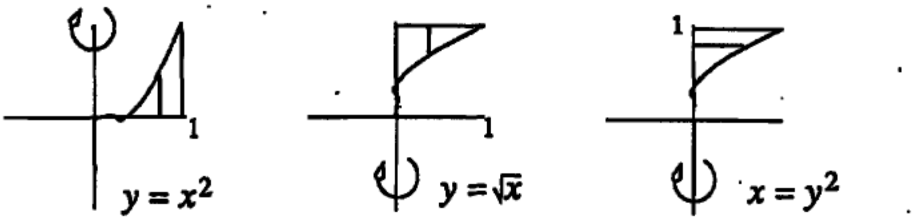
d) $z = x-b$، $dz = dx$.

$$\int_{b-a}^{b+a}4\pi x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx = \int_{-a}^{a}4\pi(z+b)\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-z^2}\,dz$$

بما أنَّ الجزء من المكامل مع المعامل z فردي، لذلك يكامل إلى 0.

4C-2

$$\int_0^1 2\pi xy\,dx = \int_0^1 2\pi x^3 dx = \pi/2$$



4C–2 (shells) 4C–3a (shells) 4C–3b (discs)

4C-3

الطبقات: $\int_0^1 2\pi x(1-y)dx = \int_0^1 2\pi x\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \pi/5$

الأقراص: $\int_0^1 \pi x^2 dy = \int_0^1 \pi y^4 dy = \pi/5$

4C-4

a) $\int_0^1 2\pi y(2x)dy = 4\pi\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy$

b) $\int_0^{a^2} 2\pi y(2x)dy = 4\pi\int_0^{a^2} y\sqrt{a^2-y}\,dy$

c) $\int_0^1 2\pi y(1-y)dy$

d) $\int_0^a 2\pi y(a-y)dy$

e) $x^2-2x+y=0 \Rightarrow \quad x = 1\pm\sqrt{1-y}$

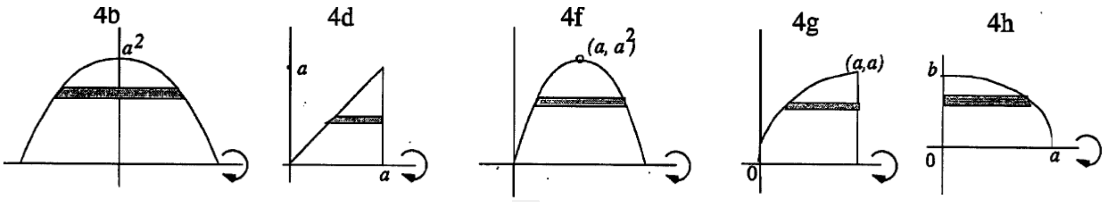
طول المجال $1-\sqrt{1-y}\le x\le 1+\sqrt{1-y}$ هو $2\sqrt{1-y}$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 2\pi y\left(2\sqrt{1-y}\right)dy = 4\pi\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy$$

$$x^2-2ax+y=0 \qquad \Rightarrow \qquad x = a\pm\sqrt{a^2-y}$$

طول المجال $a-\sqrt{a^2-y} \le x \le a+\sqrt{a^2-y}$ هو $2\sqrt{a^2-y}$

$$\Rightarrow V = \int_0^{a^2} 2\pi y 2\sqrt{a^2-y}dy = 4\pi\int_0^{a^2} y\sqrt{a^2-y}dy$$



اليمين $x=\sqrt{a^2-y}$
اليسار $x=-\sqrt{a^2-y}$

$x=y$

$x=a+\dfrac{\sqrt{a^2-y}}{a-\sqrt{a^2-y}}$

$x=y^2/a$

$x=a\sqrt{1-y^2/b^2}$

g) $\int_0^a 2\pi y\left(a-y^2/a\right)dy$

h) $\int_0^b 2\pi yxdy = \int_0^b 2\pi y\left(a^2\left(1-y^2/b^2\right)\right)dy$

(لماذا النهاية السفلى للتكامل معدومة وليست $-b$؟)

4C-5

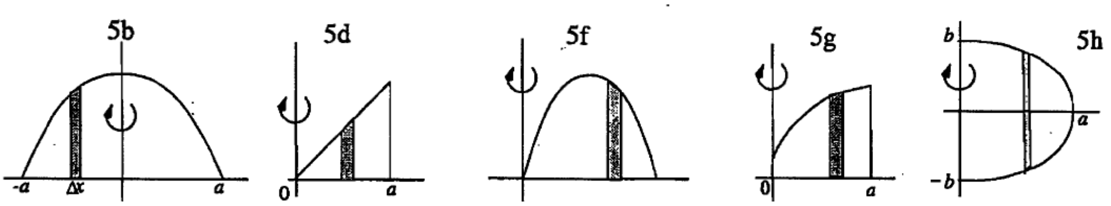
a) $\int_0^1 2\pi x\left(1-x^2\right)dx$

b) $\int_0^a 2\pi x\left(a^2-x^2\right)dx$

c) $\int_0^1 2\pi xydx = \int_0^1 2\pi x^2 dx$

d) $\int_0^a 2\pi xydx = \int_0^a 2\pi x^2 dx$

d) $\int_0^2 2\pi xydx = \int_0^2 2\pi x\left(2x-x^2\right)dx$



$y=a^2-x^2$ من أجل $5a$, ضع $a=1$

$y=x$ من أجل $5c$, ضع $a=1$

$y=2ax-x^2$ من أجل $5e$, ضع $a=1$

$y=\sqrt{ax}$

$y=b\sqrt{1-x^2/a^2}$

$y=-b\sqrt{1-x^2/a^2}$

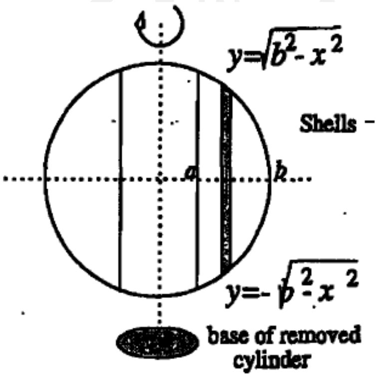
f) $\int_0^{2a} 2\pi xy\,dx=\int_0^{2a} 2\pi x\left(ax-x^2\right)dx$

g) $\int_0^{a} 2\pi xy\,dx=\int_0^{a} 2\pi x\sqrt{ax}\,dx$

h) $\int_0^{a} 2\pi x(2y)\,dx=\int_0^{a} 2\pi x\left(2b^2\left(1-x^2/a^2\right)\right)dx$

(لماذا تضاعف y في هذه المرة؟)

6-4C



$$\int_a^{b} 2\pi x(2y)\,dx=\int_a^{b} 2\pi x\left(2\sqrt{b^2-x^2}\right)dx$$

$$=-(4/3)\pi\left(b^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_a^b=(4\pi/3)\left(b^2-a^2\right)^{3/2}$$

4D. القيمة المتوسطة

4D-1

مساحة المقطع العرضي عند x هي $\pi y^2 = \pi\cdot\left(x^2\right)^2 = \pi x^4$. وبالتالي،

المساحة المتوسطة للمقطع العرضي= $\frac{1}{2}\int_0^2 \pi x^4 dx = \left.\frac{\pi x^5}{10}\right|_0^2 = \frac{16\pi}{5}$.

4D-2

المتوسط = $\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{dx}{x} = \frac{1}{a}\ln x\Big|_a^{2a} = \frac{1}{a}(\ln 2a - \ln a) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{2a}{a}\right) = \frac{\ln 2}{a}$

4D-3

لتكن $s(t)$ دالة المسافة؛ إذن السرعة هي $v(t) = s'(t)$

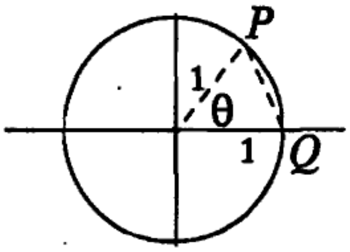
القيمة المتوسطة للسرعة = $\frac{s(b)-s(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b s'(t)dt$ بواسطة FT1 النظرية الأولى في الحساب

= السرعة المتوسطة خلال المجال $[a,b]$

4D-4

بالتناظر، يمكننا تقييد P في نصف الدائرة العلوي.

بقانون جيب التمام، لدينا $|PQ|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\theta$. بحيث



متوسط $|PQ|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2-2\cos\theta)dq = \frac{1}{\pi}[2\theta - 2\sin\theta]_0^\pi = 2$

(هذه قيمة $|PQ|^2$ عندما $\theta = \pi/2$، إذاً الإجابة منطقية.)

4D-5

بالفرضية، $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dt$ للتعبير عن $f(x)$ بدلالة $g(x)$، نضرب في x ونطبق النظرية الثانية للحساب:

$f(x)=g(x)+xg'(x)$ $\quad \int_0^x f(t)dt = xg(x) \Rightarrow$ وذلك بتطبيق FT2.. (النظرية الثانية للحساب)

4D-6

القيمة المتوسطة لـ $A(t)=\frac{1}{T}\int_0^T A_0 e^{rt}dt=\frac{1}{T}\frac{A_0}{r}e^{rt}\Big|_0^T=\frac{A_0}{rT}\left(e^{rT}-1\right)$

إذا كانت rT صغيرة، فإنه يمكننا تقريب: $e^{rT}\approx 1+rT+\frac{(rT)^2}{2}$، إذن نحصل على

$$A(t)\approx\frac{A_0}{rT}\left(rT+\frac{(rT)^2}{2}\right)=A_0\left(1+\frac{rT}{2}\right)$$

(إذا كانت $T\approx 0$، فعند نهاية T سنة ستكون الفائدة المضافة $A_0 rT$؛ بحيث إنَّ المتوسط يكون تقريباً مساوياً لزيادة رصيد الحساب خلال $T/2$ سنة، مما يجعله منطقياً.)

4D-7

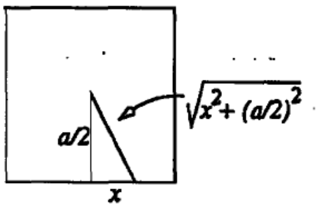
$$\frac{1}{b}\int_0^b x^2dx=b^2/3$$

4D-8

المتوسط على كل جانب يساوي المتوسط على كافة الجوانب الأربعة. بحيث إنَّ المسافة المتوسطة هي

$$\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\sqrt{x^2+(a/2)^2}\,dx$$

لا يمكننا حسابها بمعادلة حتى الوحدة 5. متوسط مربع المسافة هو



$$\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\left(x^2+(a/2)^2\right)dx=\frac{2}{a}\int_{0}^{a/2}\left(x^2+(a/2)^2\right)dx=a^2/3$$

4D-9

$$\frac{1}{\pi/a}\int_{0}^{\pi/a}\sin ax dx-\frac{1}{\pi}\cos(ax)\Big|_{0}^{\pi/a}=2/\pi$$

4E. المعادلات الوسيطية

4E-1

$y-x=t^2$ ، $y-2x==-t$. وبالتالي،

$y^2-4xy+4y^2-y+x=0 \quad \Rightarrow \quad y-x=(y-2x)^2$ (قطع زائد)

4E-2

$x^2=t^2+2+1/t^2$ و $y^2=t^2-2+1/t^2$. بالطرح نحصل على القطع المكافئ $x^2-y^2=4$.

4E-3

$(x-1)^2+(y-4)^2=\sin^2\theta+\cos^2 t=1$ (دائرة)

4E-4

$1+x^2=y^2 \quad \Rightarrow \quad 1+\tan^2 t=\sec^2 t$ (قطع مكافئ)

4E-5

$x=\sin 2t=2\sin t\cos t=\pm 2\sqrt{1-y^2}y$. يعطي هذا $x^2=4y^2-4y^4$.

4E-6

$y'=2x$ ، إذاً $t=2x$ و

$x=t/2$ ، $y=t^2/4$

4E-7

الاشتقاق الضمني يعطي $2x+2yy'=0$، إذاً $y'=-x/y$. فالوسيط هو $t=-x/y$. نعوض $x=-ty$ في $x^2+y^2=a^2$ للحصول على

$$t^2y^2+y^2=a^2 \Rightarrow \qquad y^2=a^2/\left(1+t^2\right)$$

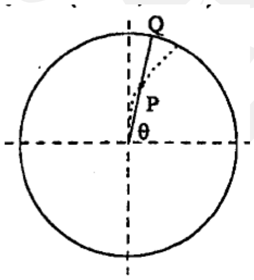
بحيث

$$x=\frac{-at}{\sqrt{1+t^2}} \text{ ، } y=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$$

بالنسبة إلى $-\infty<t<\infty$، هذا الوسيط يمر من خلال نصف الدائرة العلوي $y>0$ (باتجاه حركة عقارب الساعة). يمكن لأحدنا أن يحصل أيضا على نصف الدائرة السفلي (أيضاً باتجاه عقارب الساعة) بأخذ الجدر المربع السالب عند الحل من أجل y

$$x=\frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \text{ ، } y=\frac{-a}{\sqrt{1+t^2}}$$

4E-8



يعطى نهاية عقرب الساعات Q بدلالة الزاوية θ كما يلي: $Q=(\cos\theta,\sin\theta)$ (الوحدات بالمتر).

ثم نعبر عن θ بدلالة الزمن t (الساعات). لدينا:

$$\theta=\begin{Bmatrix}\pi/2, t=0\\ \pi/3, t=0\end{Bmatrix} \quad \theta \text{ تتناقص خطياً مع الزمن}$$

$$\Rightarrow \theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\cdot(t-0)}{1-0}$$ بحيث لدينا $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}t$.

في النهاية، بالنسبة لموضع الحلزون P، لدينا

$P=(t\cos\theta,t\sin\theta)$ حيث t تتزايد من 0 إلى 1. إذاً:

$$x=t\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}t\right)=t\sin\frac{\pi}{6}t \text{ ، } y=t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}t\right)=t\cos\frac{\pi}{6}t$$

4F. أطوال الأقواس

4F-1

a) $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{26}\,dx$ طول القوس= $\int_0^1\sqrt{26}\,dx=\sqrt{26}$.

b) $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(9/4)x}\,dx$

طول القوس = $\int_0^1\sqrt{1+(9/4)x}\,dx=(8/27)(1+9x/4)^{3/2}\Big|_0^1=(8/27)\left((13/4)^{3/2}-1\right)$

c) $y'=-x^{-1/3}\left(1-x^{2/3}\right)^{1/2}=-\sqrt{x^{-2/3}-1}$. وبالتالي فإن $ds=x^{-1/3}dx$، و

طول القوس = $\int_0^1 x^{-1/3}dx=(3/2)x^{2/3}\Big|_0^1=3/2$

d) $y'=x\left(2+x^2\right)^{1/2}$. وبالتالي فإن $ds=\sqrt{1+2x^2+x^4}\,dx=\left(1+x^2\right)dx$ و

طول القوس = $\int_1^2\left(1+x^2\right)dx=x+x^3/3\Big|_1^2=10/3$

4F-2

$y'=\left(e^x-e^{-x}\right)/2$، التلميح يدل على أن $1+(y')^2=y^2$ و $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=y\,dx$. بحيث،

طول القوس= $(1/2)\int_0^b\left(e^x+e^{-x}\right)dx=(1/2)\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_0^b=\left(e^b-e^{-b}\right)/2$

4F-3

$y'=2x$، $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+4x^2}$. بحيث، طول القوس = $\int_0^b\sqrt{1+4x^2}\,dx$.

4F-4

$ds=\sqrt{(dx/dx)^2+(dy/dt)dt}=\sqrt{4t^2+9t^4dt}$. وبالتالي،

طول القوس= $\int_0^2\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\int_0^2\left(4+9t^2\right)^{1/2}t\,dt$

$$=(1/27)(4+9t^2)^{3/2}\Big|_0^2=(40^{3/2}-8)/27$$

4F-5

$dx/dt=1-1/t^2$ ، $dy/dt=1+1/t^2$. بحيث

$ds=\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}\,dt=\sqrt{2+2/t^4}\,dt$ وطول القوس $=\int_1^2\sqrt{2+2/t^4}\,dt$

4F-6

a) $dx/dt=1-\cos t$ ، $dy/dt=\sin t$.

$ds/dt=\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}=\sqrt{2-2\cos t}$ (سرعة النقطة)

الحركة إلى الأمام (dx/dt) تكون في الحد الأعلى من أجل t من المضاعفات الفردية لـ π $(\cos t=-1)$. الحركة الأمامية في الحد الأدنى من أجل t من المضاعفات الزوجية لـ π $(\cos t=1)$.

ملاحظة: الحركة الأمامية الأكبر هي عندما تكون النقطة في أعلى العجلة، والحركة الأصغر تكون عندما تكون النقطة في الأسفل (بما أنَّ $y=1-\cos t$.)

b) $\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin(t/2)dt=-4\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi}=8$

4F-7

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

4F-8

$dx/dt=e^t(\cos t-\sin t)$ ، $dy/dt=e^t(\cos t+\sin t)$.

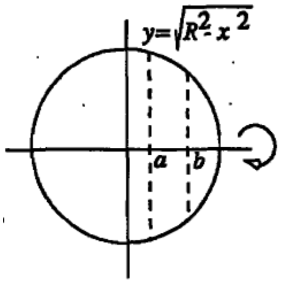
$$ds=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\cos t+\sin t)^2}\,dt=e^t\sqrt{2\cos^2 t+2\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2}e^t dt$$

و بالتالي فإن طول القوس هو:

$$\int_0^{10} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}\left(e^{10} - 1\right)$$

4G. مساحة سطح

4G-1



يدور المنحنى $y=\sqrt{R^2-x^2}$ من أجل $a\le x\le b$ حول المحور x. بما أن $y'=-x/\sqrt{R^2-x^2}$ ، نحصل على:

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+x^2/(R^2-x^2)}\,dx=\sqrt{R^2/(R^2-x^2)}\,dx=(R/y)dx$$

وبالتالي فإن عنصر المساحة هو:

$$dA=2\pi y\,ds=2\pi R\,dx$$

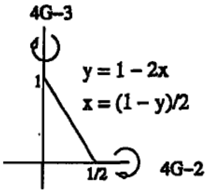
المساحة هي:

$$\int_a^b 2\pi R\,dx=2\pi R(b-a)$$

4G-2

النهايات هي $0\le x\le 1/2$. $ds=\sqrt{5}dx$ ، إذاً

$$dA=2\pi y\,ds=2\pi(1-2x)\sqrt{5}dx \Rightarrow \quad A=2\pi\sqrt{5}\int_0^{1/2}(1-2x)dx=\sqrt{5}\pi/2$$



4G-3

النهايات هي $0\le y\le 1$. $x=(1-y)/2$ ؛ $dx/dy=-1/2$. بحيث

$$ds=\sqrt{1+(dx/dy)^2}\,dy=\sqrt{5/4}\,dy$$

$$dA=2\pi y\,ds=\pi(1-y)(\sqrt{5}/2)dx \qquad \Rightarrow \qquad A=(\sqrt{5}\pi/2)\int_0^1(1-y)dy=\sqrt{5}\pi/4$$

4G-4

$$A=\int 2\pi y ds=\int_0^4 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

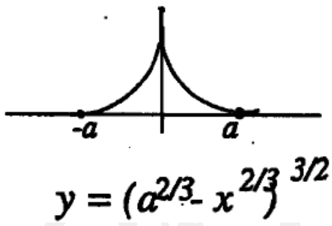
4G-5

$x=\sqrt{y}$ ، $dx/dy=-1/2\sqrt{y}$ ؛ و $ds=\sqrt{1+1/4y}\,dy$

$$A=\int 2\pi x ds=\int_0^2 2\pi\sqrt{y}\sqrt{1+1/4y}\,dy$$

$$=\int_0^2 2\pi\sqrt{y+1/4}\,dy$$
$$=(4\pi/3)(y+1/4)^{3/2}\Big|_0^2=(4\pi/3)((9/4)^{3/2}-(1/4)^{3/2})$$
$$=13\pi/3$$

4G-6



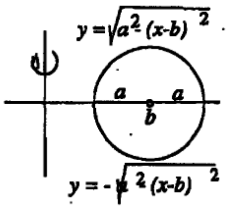
$y'=-x^{-1/3}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}$ $\Rightarrow$ $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$. ومنه

$$ds=\sqrt{1+x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})}\,dx=a^{1/3}x^{-1/3}dx$$

وبالتالي فمن خلال (استعمال تناظر المجال $-a\le x\le a$)

$$A=\int 2\pi y ds=2\int_0^a 2\pi(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}a^{1/3}x^{-1/3}dx$$
$$=(4\pi)(2/5)(-3/2)a^{1/3}(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}\Big|_0^a$$
$$=(12\pi/5)a^2$$

4G-7

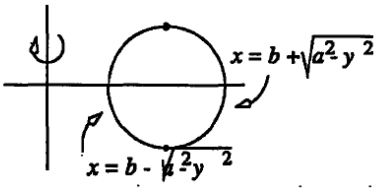


a) النصف العلوي: $y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ ، $y'=(b-x)/y$. ومنه

$$ds=\sqrt{1+(b-x)^2/y^2}\,dx=\sqrt{(y^2+(b-x)^2)/y^2}\,dx=(a/y)dx$$

بما أننا غطينا النصف العلوي فقط فيجب أن نضاعف التكامل من أجل المساحة:

$$A = \int 2\pi x ds = 4\pi a \int_{b-a}^{b+a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$$



inner and outer surfaces are
not symmetrical and not equal

b) نحتاج إلى أن ندور منحنيين $x_2 = b+\sqrt{a^2-y^2}$

و $x_1 = b-\sqrt{a^2-y^2}$ حول المحور y. القيمة:

$$dx_2/dy = -(dx_1/dy) = -y/\sqrt{a^2-y^2}$$

حيث في الحالتين كلتيهما،

$$ds = \sqrt{1+y^2/(a^2-y^2)}dy = \left(a/\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

التكامل هو:

$$A = \int 2\pi x_2 ds + \int 2\pi x_1 ds = \int_{-a}^{a} 2\pi(x_1+x_2)\frac{ady}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

لكن $x_1 + x_2 = 2b$ ، إذاً:

$$A = 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

c) تعويض $y = a\sin\theta$ ، $dy = a\cos\theta d\theta$ للحصول على

$$A = 4\pi ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta} = 4\pi ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi^4 ab$$

4H. المنحنيات في الإحداثيات القطبية

4H-1

أوجد الإحداثيات القطبية على الشكل (r,θ):

a) $(3,\pi/2)$

b) $(2,\pi)$

c) $(2,\pi/3)$

d) $(2\sqrt{2},3\pi/4)$

e) $(\sqrt{2},-\pi/4$ أو $7\pi/4)$

f) $(2,-\pi/2$ أو $5\pi/4)$

g) $(2,-\pi/6$ أو $11\pi/6)$

h) $(2\sqrt{2},-3\pi/4$ أو $5\pi/4)$

4H-2

a) (i) $(x-a)^2+y^2=a^2 \Rightarrow x^2-2ax+y^2=0 \Rightarrow r^2-2ar\cos\theta=0 \Rightarrow r=2a\cos\theta$

(ii) $\angle OPQ=90^\circ$، طالما أنها زاوية مرسومة داخل دائرة.

في المثلث القائم OPQ، $|OP|=|OQ|\cos\theta$، على سبيل المثال $r=2a\cos\theta$.

b) (i) مماثلاً لـ 4H-2 a (i)؛ الجواب هو $r=2a\sin\theta$.

(ii) مماثلاً لـ 4H-2 a (ii)؛ لاحظ أنَّ $\angle OQP=\theta$، بما أنَّ الزاويتين مكاملتان لـ $\angle POQ$.

c) (i) OQP هو عبارة عن مثلث قائم، $|OP|=r$، و $\angle POQ=\alpha-\theta$.

المعادلة القطبية هي $r\cos(\alpha-\theta)=a$، أو بالشكل الموسع

$r(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=a$ أو في النهاية:

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$$

بما أنه لدينا من المثلثين القائمين OAQ و OBQ $\cos\alpha=\frac{a}{A}$، $\sin\alpha=\cos BOQ=\frac{a}{B}$

d) بما أنَّ $|OQ| = \sin\theta$، يكون لدينا:

إذا كان P فوق المحور x، $\sin\theta > 0$، $|OP| = |OQ| - |QR|$، أو $r = a - a\sin\theta$

إذا كان P تحت المحور x، $\sin\theta < 0$، $|OP| = |OQ| + |QR|$، أو $r = a + a|\sin\theta| = a - a\sin\theta$

بحيث تكون المعادلة $r = a(1 - \sin\theta)$.

e) باختصار، عندما يكون $P = (0,0)$، $|PQ||PR| = a \cdot a = a^2$، الثابت.

باستعمال قانون جيب التمام:

$$|PR|^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$|PQ|^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi - \theta) = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta$$

و بالتالي فإن:

$$|PQ|^2|PR|^2 = (r^2 + a^2)^2 - (2ar\cos\theta)^2 = (a^2)^2$$

الذي يبسط إلى:

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

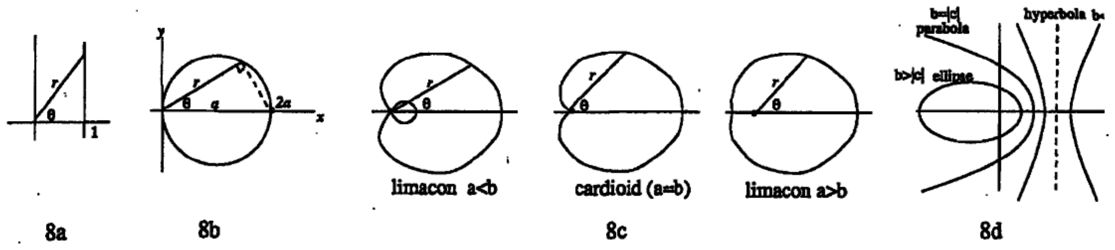
4H-3

a) $r = \sec\theta \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow x = 1$

b) $r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 = r \cdot 2a\cos\theta = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$

c) $r = (a + b\cos\theta)$ (يمثل هذا الشكل منحنى قلبي الشكل من أجل $a = b$، حلزوني مع حلقة من أجل $0 < a < b$، حلزوني بدون حلقة من أجل $a > b > 0$.)

$$r^2 = ar + br \cdot \cos\theta = ar + bx \Rightarrow x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2} + bx$$



(d

$$r = a/(b + c\cos\theta) \Rightarrow r(b + c\cos\theta) = a \Rightarrow rb + cx = a$$

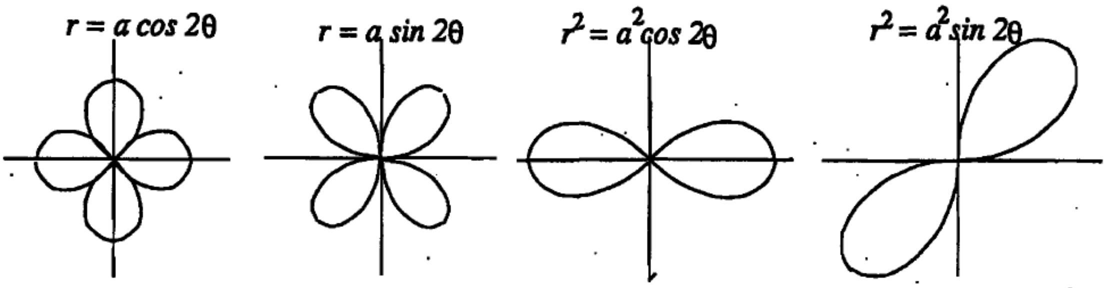
$$\Rightarrow rb = a - cx \Rightarrow r^2b^2 = a^2 - 2acx + c^2x^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2acx + (c^2 - b^2)x^2 - b^2y^2 = 0$$

(e

$$r = a\sin(2\theta) \Rightarrow r = 2a\sin\theta\cos\theta = 2axy/r^2$$

$$\Rightarrow r^3 = 2axy \Rightarrow (x^2 + y^2)^{3/2} = 2axy$$



(f

$$r = a\cos(2\theta) = a(2\cos^2\theta - 1) = a\left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1\right) \Rightarrow (x^2 + y^2)^{3/2} = a(x^2 - y^2)$$

(g

$$r^2 = a^2\sin(2\theta) = 2a^2\sin\theta\cos\theta = 2a^2\frac{xy}{r^2} \Rightarrow r^4 = 2a^2xy \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2axy$$

(h

$$r^2 = a^2\cos(2\theta) = a^2\left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1\right) \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

(i

$$r = e^{a\theta} \Rightarrow \ln r = a\theta \Rightarrow \ln\sqrt{x^2 + y^2} = a\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

4I. المساحات وأطوال الأقواس في الإحداثيات القطبية

4I-1

$\sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2 d\theta}$

a) $\sec^2\theta d\theta$

b) $2a d\theta$

c) $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\quad d\theta$

d) $\dfrac{a\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\theta}}{(b+c\cos\theta)^2}d\theta$

e) $a\sqrt{4\cos^2(2\theta)+\cos^2(2\theta)}d\theta$

f) $a\sqrt{4\sin^2(2\theta)+\cos^2(2\theta)}\quad d\theta$

g) استعمل الاشتقاق الضمني:

$$2rr' = 2a^2\cos(2\theta) \quad\Rightarrow\quad r' = a^2\cos(2\theta)/r \quad\Rightarrow\quad (r')^2 = a^2\cos^2(2\theta)/\sin(2\theta)$$

ومنه فإنه باستعمال المقام المشترك و $\cos^2+\sin^2=1$،

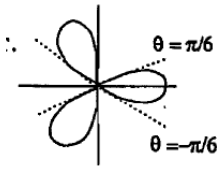
$$ds = \sqrt{a^2\cos^2(2\theta)/\sin(2\theta)+a^2\sin(2\theta)}d\theta = \frac{a}{\sqrt{\sin(2\theta)}}d\theta$$

h) هذا مشابه لـ (g):

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}d\theta$$

i) $\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta$

4I-2



three-leaf rose
three empty sectors

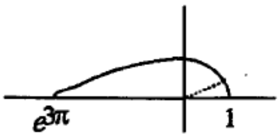
$dA = (r^2/2)d\theta$. الصعوبة الأساسية هي تقرير ما ستكون عليه نهايات التكامل. النهايات هي عدد المرات المتتالية التي عندها $r=0$.

$\theta = \pi/6 + k\pi/3 \qquad 3\theta = \pi/2 + k\pi \Rightarrow \qquad \Rightarrow \quad \cos(3\theta) = 0$، k عدد طبيعي.

بحيث، $A = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(a^2 \cos^2(3\theta)/2\right) d\theta = a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2(3\theta) d\theta$.

(توقف هنا في الوحدة 4. الحساب يكون في الوحدة 5.)

4I-3



$A = \int \left(r^2/2\right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(e^{6\theta}/2\right) d\theta = (1/12) e^{6\theta}\Big|_0^{\pi} = \left(e^{6\pi} - 1\right)/12$

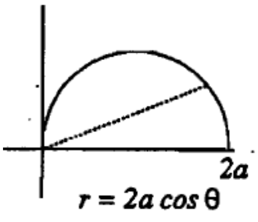
4I-4

نقط النهاية متتالية عندما $r = 0$.

$2\theta = k\pi \qquad \Rightarrow \qquad \sin(2\theta) = 0$، k عبارة عن عدد طبيعي.

بحيث، $A = \int \left(r^2/2\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(a^2/2\right) \sin(2\theta) d\theta = -\left(a^2/4\right) \cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = a^2/2$.

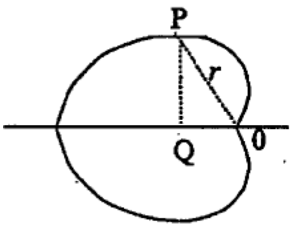
4I-5



$r = 2a\cos\theta$، $ds = 2a d\theta$، $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. (وقد اخترنا المجال بحذر بحيث يكون $r > 0$.) الطول الكلي للدائرة هو $2\pi a$. بما أنَّ نصفي الدائرة العلوي والسفلي متناظران، فإنه يكفي حساب المعدل عند النصف العلوي لنصف الدائرة:

$$\frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi/2} 2a\cos\theta (2a) d\theta = \frac{4a}{\pi} \sin\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4a}{\pi}$$

4I-6



a) بما أنَّ النصفين العلوي والسفلي للمنحنى القلبي متناظرين، فإنه يكفي حساب المسافة المتوسطة إلى المحور x فقط لنقطة على النصف العلوي.

لدينا $r = a(1 - \cos\theta)$، والمسافة إلى المحور x هي $r\sin\theta$، إذاً

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} r\sin\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{a}{2\pi}(1-\cos\theta)^2\Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi}$$

b) $ds = \sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2}\,d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta = a\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta = 2a\sin(\theta/2)d\theta$ باستعمال صيغة نصف الزاوية.

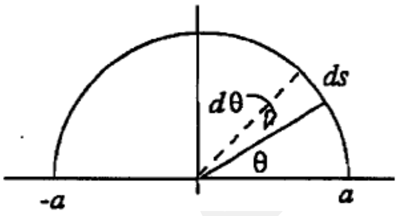
طول القوس $= \int_0^{2\pi} 2a\sin(2\theta)d\theta = -4a\cos(\theta/2)\Big|_0^{2\pi} = 8a$

بالنسبة إلى المتوسط، لا تستعمل صيغة نصف الزاوية من أجل ds، واستعمل المجال $-\pi<\theta<\pi$، مع $\sin\theta$ فردي:

المتوسط $= \frac{1}{8a}\int_{-\pi}^{\pi} |r\sin\theta| a\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{8a}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\theta|\sqrt{2}a^2(1-\cos\theta)^{3/2}d\theta$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^{3/2}\sin\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}a}{10}(1-\cos\theta)^{5/2}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{5}a$$

4I-7



$dx = -a\sin\theta d\theta$. بحيث إنَّ نصف الدائرة $y>0$ له المساحة

$$\int_{-a}^{a} ydx = \int_{\pi}^{0} a\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta = a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

لكن

$$\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos(2\theta))d\theta = \pi/2$$

إذاً المساحة هي $\pi a^2/2$ كما يجب أن تكون بالنسبة إلى نصف الدائرة.

طول القوس: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$\Rightarrow \quad (ds)^2 = (-a\sin\theta d\theta)^2 + (a\cos\theta d\theta)^2 = a^2(\sin^2 d\theta + \cos^2 d\theta)(d\theta)^2$$

$$\Rightarrow \quad ds = \int_0^{2\pi} a d\theta = 2\pi a$$

4J. تطبيقات أخرى

4J-1

قسم الماء في الحفرة إلى n قرص دائرية سماكتها Δy.

حجم كل قرص: $\Delta y \ \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

طاقة صعود قرص الماء من العمق y_i إلى السطح هي: $\frac{\pi}{4} k y_i \Delta y$.

بإضافة طاقات مختلف الأقراص، وأخذ النهاية عندما تؤول n إلى المالانهاية،

$$E = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n \frac{\pi}{4} k y_i \Delta y = \int_0^{100} \frac{\pi}{4} k y dy = \frac{\pi k}{4}\frac{y^2}{2}\Big]_0^{100} = \frac{\pi k 10^4}{8}$$

4J-2

قسم الساعة إلى n مجالاً صغيراً من الزمن Δt.

عند اللحظة t_i، $i = 1,\ldots,n$ هنالك $x_0 e^{-kt_i}$ غراماً من المادة، تنتج حوالي $r x_0 e^{-kt_i} \Delta t$ وحدة إشعاعية خلال المجال الزمني $[t_i, t_i + \Delta t]$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n r x_0 e^{-kt_i} \Delta t = \int_0^{60} r x_0 e^{-kt} dt = r x_0 \frac{e^{-kt}}{-k}\Big]_0^{60} = \frac{r x_0}{k}\left(1 - e^{-60k}\right)$$

4J-3

قسم المسبح إلى n طبقة أسطوانية متمركزة، نصف قطرها r_i، $i = 1,\ldots,n$، وسمكها Δr.

حجم الطبقة i هو بالتقريب $2\pi r_i D \Delta r$.

حجم المادة الكيميائية للطبقة i هو بالتقريب $\frac{k}{1+r_i^2} 2\pi r_i D \Delta r$.

بالإضافة، وأخذ النهاية عندما تؤول n إلى المالانهاية ،

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\frac{k}{1+r_i^2}2\pi r_i D\Delta r = \int_0^R 2\pi kD\frac{r}{1+r^2}dr = \pi kD\ln\left(1+r^2\right)\Big]_0^R = \pi kD\ln\left(1+R^2\right)\text{gms}$$

4J-4

قسم المجال إلى n مجالاً صغيراً بطول Δt بواسطة النقاط t_i ، $i=1,\dots,n$.

العدد التقريبي لوحدات التسخين اللازمة لتثبيت درجة الحرارة عند $75°$ على المجال الزمني $[t_i, t_i+\Delta t]$ هو:

$$\left[75-10\left(6-\cos\frac{\pi t_i}{12}\right)\right]\cdot k\Delta t$$

بالجمع عبر المجالات الزمنية والمرور من خلال الحد:

التسخين الكلي =

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\left[75-10\left(6-\cos\frac{\pi t_i}{12}\right)\right]\cdot k\Delta t\\ &= \int_0^{24}k\left[75-10\left(6-\cos\frac{\pi t}{12}\right)\right]dt\\ &= \int_0^{24}k\left(15-10\cos\frac{\pi t}{12}\right)dt = k\left[15t+\frac{120}{\pi}\sin\frac{\pi t}{12}\right]_0^{24} = 360k\end{aligned}$$

4J-5

قسم الشهر إلى n مجالاً متساوياً طول كل مجال Δt بواسطة النقاط t_i، $i=1,\dots,n$.

عبر المجال $[t_i, t_i+\Delta t]$، عدد الوحدات المنتجة هو حوالي $(10+t_i)\Delta t$. كلفة تخزين هذا المُنتَج في المخزن حتى نهاية الشهر هو $c(30-t_i)(10+t_i)\Delta t$. بالجمع والمرور من خلال الحد،

الكلفة الكلية =

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}c(30-t_i)(10+t_i)\Delta t\\ &= \int_0^{30}c(30-t)(10+t_i)dt = c\left[300t+10t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^{30} = 9000c\end{aligned}$$